École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

Mathématiques III

OPTION ÉCONOMIQUE

EXERCICE 1 On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 9 & 4 & -11 \\ 9 & 4 & -11 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On se propose de résoudre le système d'équations :

$$(S) \qquad \begin{cases} XP = PX \\ AX - XB = C \end{cases}$$

où X est un élément inconnu de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

1) a) Appliquer la méthode du pivot, en explicitant les calculs, pour montrer que la matrice P est inversible et pour calculer son inverse.

b) La matrice P^{-1} est-elle solution du système (S) ?

2) a) Déterminer les valeurs propres des matrices A et B.

b) Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à A et à B telle que la matrice de passage associée soit P.

3) Dans ce qui suit, on pose : $Y = X - P^{-1}$

a) Montrer que la matrice X est solution du système (S) si et seulement si la matrice Y vérifie le système :

$$\begin{cases} PY = YP \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

b) En déduire l'ensemble des solutions du système (S).

EXERCICE 2

Pour tout nombre entier naturel n, on considère les fonctions g_n et G_n définies sur $\mathbb{R}_+$ par les relations :

$$g_n(x) = x^n \, \mathrm{e}^{-x/2} \qquad G_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\, n\,!} \int_0^x g_n(t)\, \mathrm{d}t$$

1. Étudier les variations des fonctions g_0, g_1 et g_2. Tracer les graphes de ces fonctions dans un même repère cartésien.

2. a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $G_{n+1}(x) - G_n(x)$.

b) Calculer $G_0(x)$, $G_1(x)$ et $G_2(x)$.

c) Déterminer la limite de $G_0(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de $G_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ (l'entier n étant fixé).

3. Soit F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_n(x) = G_n(x)$ si $x \geq 0$, $F_n(x) = 0$ si $x < 0$

Montrer que F_n a les propriétés d'une fonction de répartition.

On considère une variable aléatoire X_n de fonction de répartition F_n. Déterminer la densité f_n de X_n. Calculer l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$. Vérifier que le rapport $\dfrac{E(X_n)}{V(X_n)}$ est indépendant de n.

4. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n, la fonction f_n prend une valeur maximale M_n. Trouver la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du rapport $\dfrac{M_{n+1}}{M_n}$.

5. On suppose que le nombre réel strictement positif x est fixé. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout nombre entier naturel non nul n, la probabilité pour que $T \geq n$ soit égale à $F_{n-1}(x)$.

Déterminer la loi de probabilité de T. Calculer l'espérance et la variance de T.

FIN